УДК 378

О ПОНЯТИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ

Игошин В.И., доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор,
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов
igoshinvi@mail.ru

Аннотация. Выпускники современной средней школы слабо владеют понятием и методами доказательства математических, прежде всего геометрических, теорем. Это обусловлено как системой организации изучения геометрии в школе (ЕГЭ, отмена устного экзамена), так и недостаточным уровнем логико-дидактической подготовки будущих учителей математики на уровнях бакалавриата и магистратуры в реформированных классических университетах. В сообщении предлагается усилить роль курса математической логики в системе подготовки будущих учителей математики, в частности, в процессе формирования у них понятия строгого математического доказательства. Прекрасной методической моделью для этого может служить формализованное исчисление высказываний. Показывается, что доказательства теорем школьного курса геометрии полностью укладываются в концепцию строгого математического доказательства, предлагаемую формализованным исчислением высказываний.

Ключевые слова: доказательство, вывод из аксиом, теорема, аксиоматический метод, аксиоматическая теория, формализованное исчисление высказываний.

ABOUT NOTION OF PROOVING OF MATHEMATICAL THEOREMS

V.I. Igoshin, doctor of pedagogical sciences, candidate of physico-mathematical sciences, professor,
Saratov national research state University name N. G. Chernyshevsky, Saratov
igoshinvi@mail.ru

Abstract. The graduates of modern secondary schools have a poor command of the concept and methods of mathematical proofs, especially geometric theorems. This is due to the system of organization of study of geometry in school (Unified State Examination, cancel the oral examination), and the low level of logical-didactical training of future teachers of mathematics at the levels of undergraduate and graduate programs in a reformed classical universities. The message proposed to strengthen the role of the course in mathematical logic in the system of preparation of future teachers of mathematics, in particular, in the process of forming the concept of rigorous mathematical proof. A great methodological model for this may be formalized propositional calculus. It is shown that the proof of the theorems of school geometry course completely fit into the concept of rigorous mathematical proofs offered by formal calculus.

Keywords: proof, inference from the axioms, the theorem, axiomatic method, axiomatic theory, propositional calculus.

Введение. Педагогическая проблема обучения доказательству. В современной средней школе понятия доказательства, аксиоматического метода, аксиоматической теории, свойственные, прежде всего, школьному курсу геометрии, практически полностью исчезли. Система ЕГЭ и отмена устного экзамена по геометрии привели к тому, что теоретический материал на уроках геометрии излагается без доказательств, директивно, учащиеся перестали воспроизводить доказательства, демонстрирующие им логические способы рассуждений, в устной форме и тем самым перестали обучаться искусству рассуждений, необходимому в любой области деятельности. Основное внимание в курсе геометрии уделяется утилитарному применению теоретических фактов и формул к решению типовых задач, аналогичных тем, которые предлагаются в ЕГЭ. В результате такого реформирования геометрия, наиболее логичная из школьных учебных дисциплин, оказалась отделена от логики и перестала учить логике доказательств и рассуждений.

С другой стороны, и сами современные молодые учителя, выпускаемые по четырехлетней программе бакалавриата направления «Педагогическое образование» из современных классических университетов, в которых бесследно растворились бывшие педагогические институты, не владеют логическими понятиями доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории. Курсы геометрии и математической логики сокращены в этих университетах до катастрофических объемов, а в некоторых университетах курс математической логики для будущих учителей математики исключен вовсе. Это во многом обусловлено тем, что современный ФГОС отпустил составление конкретных учебных планов по направлениям бакалавриата на откуп самим университетам. Мощный сокрушительный удар в этом направлении нанесло бездумное применение очередной образовательной инновации – прикладного бакалавриата.

Спасительной соломинкой в этой катастрофической ситуации могла бы служить магистратура, призванная расширить и углубить знания и компетенции, приобретенные на уровне бакалавриата. Но для этого должна быть глубоко продумана преемственная взаимосвязь в образовательных системах двух уровней – бакалаврата и магистратуры. Некоторые соображения на этот счет в части подготовки учителей математики высказывались автором в [1] – [5].

Интуитивно убедительное доказательство и формальное доказательство. Что же такое доказательство? «Доказательство (в общепринятом употреблении этого слова) – это всего лишь рассуждение, которое должно убедить нас настолько, что мы сами готовы убеждать с его помощью других. Несомненно, что уточнение этого понятия (во всей полноте его объёма) – одна из важнейших задач математики». [6, с. 14]. Математика выделилась из системы всех прочих наук именно тем, что утверждаемые в ней факты подтверждались доказательствами. Считается, что первые математические доказательства в современном их понимании появились в Древней Греции в VII – VI вв. до Р.Х. и связаны они с именами Фалеса и Пифагора. Эту мысль подчеркивает Н.Бурбаки, начиная свой знаменитый трактат «Начала математики» словами: «Со времён греков говорить “математика” – значит говорить “доказательство”». [7, с. 23]. Сократ, Платон и Аристотель заложили основы логики как науки о рассуждениях и доказательствах и сформулировали принципы построения всякой науки как аксиоматической теории. Следуя их заветам, Евклид впервые построил геометрию как доказательную логическую теорию.

Понимание доказательства, утвердившееся в математике со времен древних греков, можно рассматривать как интуитивно-убедительное. Оно тесно связано с языковыми средствами и с социальной психологией человеческого общества. Оба эти фактора меняются с течением времени, а вместе с ними меняются языковое оформление доказательств и представления об интуитивной ясности, очевидности и убедительности. С течением времени вместе с развитием математики и логики развивались также критерии и принципы логической строгости математических доказательств.

Такой характер интуитивно-убедительного рассуждения понятие доказательства имело вплоть до конца XIX века. К этому времени развитие новых направлений в математике (в частности, открытие неевклидовых геометрий, обнаружение парадоксов канторовской теории множеств, проистекших из применения к бесконечным множествам методов рассуждений, свойственных рассуждениям о конечных множествах) привели к необходимости подвергнуть понятие доказательства более глубокому анализу с целью полного исключения из него интуитивного элемента. Такой анализ был осуществлен (математическими) логиками, начиная с Г.Фреге, что привело к введению нового понятия – понятия формального доказательства, которое стало существенным усовершенствованием интуитивно-психологического понятия доказательства. Можно сказать, что понятие формального доказательства, оттолкнувшись от интуитивных представлений о содержательном доказательстве, явилось логико-математической моделью интуитивного понятия доказательства.

Таким образом, понятие доказательства, появившись в древнегреческой математике вместе со становлением логики как науки, современного уровня строгости достигло в XX веке вместе со становлением логики как математической науки и превращением ее в математическую логику. Поэтому логические понятия строгого математического доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории призван сформировать в будущем учителе математики курс математической логики.

Понятие формального доказательства и школьная геометрия. Понятия формального доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории возникают в формальной части курса математической логики, когда изучаются формализованные исчисления высказываний и предикатов, а также формальные аксиоматические математические теории. При этом, курс математической логики, конечно же, не учит находить доказательства тех или иных математических теорем, а тем более открывать сами эти теоремы. Его задача состоит в том, чтобы вскрыть методологическую сущность этих важнейших математических категорий с тем, чтобы будущий учитель математики мог руководствоваться ими в своей педагогической практике.

Важнейшее логическое правило, на котором основано построение рассуждений и доказательств, сформулировано еще Аристотелем. Это – правило Modus Ponens (MP): из утверждений F и $F \rightarrow G$ («если F, то G») непосредственно следует утверждение G. Понятие доказательства определяется в рамках некоей аксиоматической теории $\mathbf{Th}(\boldsymbol{\Sigma})$, построенной на базе некоторой системы аксиом $\boldsymbol{\Sigma} = \{A_1\ ,\ A_2\ ,\ \dots\ ,\ A_n\ \}$. При этом, в процессе доказательства могут использоваться какие-то ранее доказанные утверждения (которые называют гипотезами), совокупность которых обозначается Γ.

Итак, в математической логике дается следующее определение строгого доказательства.

Под *доказательством (выводом* (из аксиом)) утверждения G из системы аксиом $\boldsymbol{\Sigma}$ понимают такую конечную последовательность утверждений $B_1\ ,\ B_2\ ,\ \dots\ ,\ B_s \equiv G$ утверждений теории, оканчивающуюся доказываемым утверждением G, в которой каждое утверждение есть либо аксиома из $\boldsymbol{\Sigma}$, либо получено из предшествующих утверждений этой последовательности по правилу вывода MP. Утверждение G *доказуемо (выводимо из аксиом,* или *является теоремой)*, если существует доказательство этого утверждения, т.е. доказательство, оканчивающееся этим утверждением G . При этом пишут: $\boldsymbol{\Sigma} \vdash G$, или, короче, $\vdash G$, если понятно, о какой системе аксиом идет речь. Определение понятия *вывода (и выводимости) из множества гипотез* Γ отличается от сформулированного тем, что члены последовательности-вывода $B_1\ ,\ B_2\ ,\ \dots\ ,\ B_s \equiv G$ могут быть также и элементами из Γ. При этом пишут: $\Gamma \vdash G$.

Покажем, что этому определению действительно соответствуют доказательства теорем школьного курса геометрии. В качестве примера рассмотрим теорему 6.3 из учебника А.В.Погорелова «Геометрия. 7 – 11»: «*У параллелограмма противолежащие стороны равны*». (Мы опустили вторую часть этой теоремы, утверждающую, что у параллелограмма противолежащие углы равны). Воспроизведём сначала доказательство этой теоремы, приводимое в учебнике:

«Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм. Проведём диагонали параллелограмма. Пусть O – точка их пересечения. Равенство противолежащих сторон AB и CD следует из равенства треугольников AOB и COD. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OA = OC$ и $OB = OD$ по свойству диагоналей параллелограмма. Точно так же из равенства треугольников AOD и COB следует равенство другой пары противолежащих сторон – AD и BC».

Более строгая логическая формулировка требуемой теоремы имеет вид: «*Если ABCD – параллелограмм, то* $AB = CD$». Представим ее доказательство в виде последовательности (цепочки) узловых утверждений, составляющих его:

а) $ABCD$ – параллелограмм (по условию);

б) O – точка пересечения его диагоналей (по построению);

в) $\angle AOB = \angle COD$ (как вертикальные, по теореме 2.2);

г) $OA = OC$ (по свойству диагоналей параллелограмма, теорема 6.2);

д) $OB = OD$ (по свойству диагоналей параллелограмма, теорема 6.2);

е) $\Delta AOB = \Delta COD$ (из в, г, д по первому признаку равенства треугольников, теорема 3.1);

ж) $AB = CD$ (из е по определению равных треугольников).

Наконец, расширим эту последовательность до такой последовательности утверждений, которая предусмотрена в определении доказательства, сформулированном выше:

(1) $ABCD$ – параллелограмм. Гипотеза

(2) O – точка пересечения его диагоналей. Гипотеза

(3) Углы $\angle AOB$ и $\angle COD$ вертикальные. Гипотеза

(4) Если углы $\angle AOB$ и $\angle COD$ вертикальные, то $\angle AOB = \angle COD$. Теорема 2.2

(5) $\angle AOB = \angle COD$ (MP): (3), (4)

(6) $ABCD$ – параллелограмм и O – точка пересечения его диагоналей. $\wedge$-введ: (1), (2)

(7) Если $ABCD$ – параллелограмм и O – точка пересечения его диагоналей, то $OA = OC$ Теорема 6.2

(8) $OA = OC$ (MP): (6), (7)

(9) Если $ABCD$ – параллелограмм и O – точка пересечения его диагоналей, то $OB = OD$ Теорема 6.2

(10) $OB = OD$ (MP): (6), (9)

(11) $\angle AOB = \angle COD$ и $OA = OC$ и $OB = OD$ $\wedge$-введ: (5), (8), (10)

(12) Если $\angle AOB = \angle COD$ и $OA = OC$ и $OB = OD$, то $\Delta AOB = \Delta COD$ Теорема 3.1

(13) $\Delta AOB = \Delta COD$ (MP): (11), (12)

(14) Если $\Delta AOB = \Delta COD$, то $AB = CD$ По опр. равных треугольников

(15) $AB = CD$ (MP): (13), (14)

Аналогично доказывается, что $AD = BC$. Теоремы 2.2, 6.2 и 3.1, указанные в доказательстве, это – доказанные ранее теоремы из учебника А.В.Погорелова. В пунктах (5), (8), (13) и (15) используется правило вывода Modus Ponens, а в пунктах (6) и (11) – правило введения конъюнкции ($\wedge$-введ): из утверждений F и G непосредственно следует утверждение $F \wedge G$.

Итак, из гипотезы «*ABCD – параллелограмм*» выведено утверждение «$AB = CD$». В результате заключаем, что доказана теорема «*Если ABCD – параллелограмм, то AB = CD*». Это заключение основано на правиле введения импликации (теореме о дедукции): если из утверждений Γ, F выводится утверждение G, то из утверждений Γ выводится утверждение $F \to G$. Отметим, что в процессе доказательства могут использоваться и другие правила логических умозаключений. Вот некоторые из них (см., например, [8, с. 77 – 81], [9, с. 43 – 45]):

1) $P \wedge Q \vdash P$; $P \wedge Q \vdash Q$ (правила удаления конъюнкции);

2) $P \vdash P \vee Q$; $Q \vdash P \vee Q$ (правила введения дизъюнкции);

3) $P \to Q,\ Q \to R \vdash P \to R$ (правило силлогизма, или цепного заключения);

4) $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ (правило контрапозиции);

5) $P \to Q,\ \neg Q \vdash \neg P$ (правило Modus Tollens);

6) $(P \wedge Q) \to R \vdash (P \wedge \neg R) \to \neg Q$ (правило расширенной контрапозиции);

7) $P \to (Q \to R) \vdash (Q \to P) \to R$ (правило перестановки посылок);

8) $P \to R,\ Q \to R \vdash (P \vee Q) \to R$ (правило разбора случаев);

9) $P_1 \to Q,\ P_2 \to Q,\ P_1 \vee P_2 \vdash Q$ (простая конструктивная дилемма);

10) $P_1 \to Q_1,\ P_2 \to Q_2,\ P_1 \vee P_2 \vdash Q_1 \vee Q_2$ (сложная конструктивная дилемма);

11) $P \to Q_1,\ P \to Q_2,\ \neg Q_1 \vee \neg Q_2 \vdash \neg P$ (простая деструктивная дилемма);

12) $P_1 \to Q_1$, $P_2 \to Q_2$, $\neg Q_1 \vee \neg Q_2 \vdash \neg P_1 \vee \neg P_2$ (сложная конструктивная дилемма);

13) $\neg\neg P \vdash P$ (сильное удаление отрицания);

14) $P, \neg P \vdash Q$ (слабое удаление отрицания).

Приведем пример умозаключения, выполняемого по правилу расширенной контрапозиции.

$(P \wedge Q) \to R$: «*Если прямая l перпендикулярна двум прямым a и b, лежащим в плоскости π, и прямые a и b не параллельны, то прямая l перпендикулярна всякой прямой c, лежащей в плоскости* π».

$(P \wedge \neg R) \to \neg Q$: «*Если прямая l перпендикулярна двум прямым a и b, лежащим в плоскости π, и прямая l не перпендикулярна некоторой прямой c, лежащей в этой плоскости, то прямые a и b параллельны*».

Здесь: P: «*Прямая l перпендикулярна двум прямым a и b, лежащим в плоскости π*»;

Q: «*Прямые a и b не параллельны*»;

R: «*Прямая l перпендикулярна всякой прямой c, лежащей в плоскости* π». □

Приведенные правила умозаключений по существу и являются математической формализацией тех мыслительных процессов, которые происходят в нашем мозгу при рассуждениях в поисках доказательства математических теорем.

Коротко говоря, доказательство в математике получается в результате конечной последовательности применений правил вывода, т.е. правильных умозаключений, в которых вывод каждого предыдущего умозаключения служит посылкой для следующего, а последним заключением является утверждение, истинность которого требуется установить. При этом, исходными посылками могут служить не только аксиомы, но и утверждения, истинность которых установлена (доказана) раньше (они-то и образуют множество гипотез Γ).

Таким образом, рассмотренное определение доказательства представляет собой логическую формализацию, своего рода логическую модель процесса доказательства в конкретно-содержательных математических теориях. Именно так устроены доказательства в математике, как в высшей, так и в школьной. Чрезвычайно важно наглядно и доступно продемонстрировать это будущему учителю математики и убедить его в этом.

Заключение. Дальнейшее развитие теория доказательства получает в математической логике, в тех ее разделах, где вводятся и изучаются формализованные исчисления высказываний и предикатов, а также формальные аксиоматические математические теории. На уровнях бакалавриата и магистратуры будущие учителя математики могут с разной степенью подробности ознакомиться с этой теорией [2]. Если будущие учителя математики будут владеть теорией доказательства, то есть надежда, что они сумеют и своих учеников – выпускников школ – через школьные математические дисциплины и, прежде всего, через геометрию, приобщить к культуре рассуждений, обоснований и доказательств, так необходимой выпускникам школ во всякой деятельности, какую бы они ни избрали.

По-прежнему актуальной остаётся двуединая педагогическая задача, поставленная великим математиком XX века академиком АН СССР А.Н.Колмогоровым в 1962 г.: «1) Привести общие логические основы современной математики в такое состояние, чтобы их можно было излагать в школе подросткам 14 – 15 лет. 2) Уничтожить расхождение между «строгими» методами чистых математиков и «нестрогими» приёмами математических рассуждений, применяемых прикладными математиками, физиками и техниками». (Цит. по книге [6, с. 15]). Решая её, полезно не забывать, что «то, что было доказательством для Евклида, остается доказательством и в наших глазах». [7, с. 23].

Литература

1. Игошин В. И. О подготовке бакалавров и магистров педагогического образования по профилю «педагогическое образование» // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Философия. Психология. Педагогика. – 2014. – Т. 14. – Вып. 3. – С. 103-106.
2. Игошин В. И. Подготовка будущих учителей математики и информатики в области дисциплин дискретной математики в условиях бакалавриата и магистратуры // Образование и наука. – 2013. – №7 (106). – С. 85-100.

3. Игошин В. И. Формирование логико-философской культуры будущих учителей математики в условиях магистратуры // Известия Самарской государственной сельскохозяйственной академии. – 2012. – Т. 2. – С. 153-157.

4. Игошин В. И. Подготовка в области дискретных математических наук будущих учителей информатики в условиях бакалавриата и магистратуры // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. – 2011. – № 4 (18). – С. 343-345.

5. Игошин В. И., Капитонова Т. А., Лебедева С. В. Содержательно-методические аспекты предметной подготовки бакалавров педагогического образования (профиль – математическое образование) // Гуманитарные науки и образование. (Мордовский государственный педагогический институт им. М.Е.Евсевьева (Саранск)). – 2012. – №1(9). – С. 14-17.

6. Успенский В. А. Апология математики: [сборник статей] – СПб: Амфора. ТИД Амфора, 2009. – 554 с.

7. Бурбаки Н. Теория множеств / Пер. с фр. – М.: Мир, 1965. – 456 с.

8. Игошин В. И. Элементы математической логики: Учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. – М.: Изд. центр «Академия», 2016. – 320 с.

9. Игошин В. И. Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов: учебное пособие. – М.: КУРС: ИНФРА-М, 2017. – 392 с. (Бакалавриат).